Revista Brasileira de
Expressão Gráfica

AS LIÇÕES DE MONGE E A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS[1]

Danusa Chini Gani [2]

Resumo: Este artigo descreve o raciocínio geométrico empregado por Gaspard Monge com o objetivo de determinar o plano tangente a três esferas, tomando-se como base a metodologia de resolução de problemas que foi publicada por George Pólya, um século e meio depois. Procuramos enfatizar a estratégia geométrica, usada para a construção dos objetos tridimensionais, que considera as relações e propriedades dos elementos espaciais, em lugar de focar nos desenhos e métodos projetivos de representação. O tópico tratado faz parte das lições de Geometria Descritiva, ministradas por Monge, em 1795. Nosso objetivo principal é destacar os processos mentais desenvolvidos para resolver os problemas construtivos ou, em outras palavras, ressaltar o método de pensamento que pode ser encontrado naquelas palestras.

Palavras-chave: geometria descritiva, resolução de problemas, educação gráfica.

Abstract: This paper describes the geometric reasoning process of Gaspard Monge to find a plane tangent to three spheres, grounded on the problem solving methodology that was published by George Pólya a century and a half later. We seek to highlight geometric strategy for constructing three-dimensional objects based on the relationships and properties of spatial entities instead of focusing on drawings solutions and projection methods. The subject was extracted from the publication of the lessons in Descriptive Geometry, taught by Monge in 1795. Our main aim is to stress decision processes for solving constructive problems or, in other words, to stress the method of thinking that can be found in those lectures.

Keywords: descriptive geometry, problem solving, graphics education.

1 Introdução

Um matemático encontrava-se sentado à sua mesa de trabalho quando percebeu que a cortina da janela à sua direita começava a pegar fogo. Olhou à sua volta e viu que

[1] Este artigo foi apresentado no Geometrias & Graphica 2015, e integra os Proceedings do referido evento.

[2] Departamento de Técnicas e Representação Gráfica, Escola de Belas Artes, Universidade Federal do Rio de Janeiro. dcgani@ufrj.br

havia um balde com água na porta da sala. Correu até lá, pegou o balde e debelou o início de incêndio. Passados alguns dias, encontrava-se novamente trabalhando à sua mesa quando observou que a cortina começava, mais uma vez, a incendiar-se. Olhou à sua volta e viu que havia um balde com água bem ao seu lado. Rapidamente, o matemático apanhou o balde, correu até a porta da sala, apoiou-o no chão, voltou a pegá-lo e finalmente, apagou o fogo.

Esta anedota faz uma sátira a um método de resolução de problemas bastante comum entre os matemáticos: recair no problema anterior. Sobre esse assunto, destacamos o livro A Arte de Resolver Problemas em que seu autor, George Pólya (1995) fala dos processos solucionadores das questões práticas e cita, entre eles, a experiência adquirida com assuntos semelhantes. O matemático e professor estabelece quatro fases de trabalho na resolução de um problema. A primeira trata da compreensão da questão por intermédio do isolamento das suas partes principais e de sua consideração sob diversos pontos de vista, procurando contatos com conhecimentos previamente adquiridos. A próxima etapa é a de estabelecer um plano para chegar à solução. Nesta, há a indagação sobre o conhecimento de um problema correlato já resolvido e sobre a possibilidade de reformulação da questão. A terceira fase é dedicada à execução do plano e requer o exame cuidadoso de cada passo para garantir a correção do resultado. A última etapa consiste no retrospecto que é essencial para a consolidação do conhecimento e para o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas. Nesta etapa devem ser examinadas as possibilidades de alcançar o resultado por um caminho diferente e de utilizar o resultado, ou o método, em alguma outra indagação.

Ao proceder à leitura da publicação das lições de geometria descritiva de Gaspard Monge (1989), proferidas aos alunos e futuros professores das escolas normais francesas, em 1795, observamos que o mestre já fazia uso constante do procedimento heurístico especificado por Pólya cento e cinquenta anos após, tanto no discurso explicativo quanto na sequência das questões propostas, empregando uma linha de pensamento essencialmente intuitiva.

Neste artigo, iremos apresentar um tópico dessas lições: traçar um plano tangente, simultaneamente, a três esferas dadas. O objetivo é mostrar a maneira como o professor conduz o processo mental a fim de chegar à solução da questão. Os itens que antecedem esse desafio preparam o aprendiz para o resultado final, caracterizando o método heurístico de ensino. Faremos um paralelo com os processos descritos por Pólya intitulando as questões de Monge com as quatro fases estabelecidas por aquele na resolução de um problema: (1) compreensão do problema; (2) estabelecimento de um plano; (3) execução do plano; (4) retrospecto.

O texto exposto é parte da tese de doutorado que estamos desenvolvendo no Programa de Pós-graduação em Arquitetura – PROARQ/FAU, e se integra à pesquisa intitulada A Educação do Olhar: apreensão dos atributos geométricos da forma dos lugares.

O tópico abordado neste ensaio situa-se na segunda parte das lições, em que Monge trata dos planos tangentes e das retas normais às superfícies curvas. Antes de enunciar o problema do qual iremos tratar, o professor resolve outro: o de conduzir um plano tangente a uma superfície curva por um de seus pontos.

2 Problema: Plano tangente a três esferas

2.1 1ª Fase: Compreensão do problema

Após tratar da condução de um plano tangente por um ponto da curva, Monge propõe uma variação do problema, alterando a situação de um ponto dado na superfície para um ponto exterior a esta, e estabelece uma comparação entre os dois. Diz que quando o ente conhecido é o ponto de contato, ele basta para determinar a posição do plano tangente. Porém, o mesmo não acontece quando o ponto está fora da superfície. Lembra que para determinar a posição de um plano é necessário satisfazer a um total de três condições diferentes e que, em geral, a propriedade de ser tangente a uma curva representa uma só delas. A fim de conduzir o pensamento do estudante à compreensão do problema, faz a exposição verbal de uma sequência de situações, de caráter dinâmico, oferecendo uma demonstração intuitiva à sentença enunciada.
Supõe serem três as superfícies curvas dadas e que o plano deva ser tangente a uma delas em qualquer um de seus pontos. Diz ser possível imaginar o plano se movimentando em torno dessa superfície sem deixar de lhe ser tangente: ele poderá se mover em todos os sentidos e direções. O ponto de contato, porém, se deslocará sobre a superfície à medida que o plano mudar de posição e a direção de seu movimento será a mesma daquela do plano (Figura 1).

Concebendo que o deslocamento do plano ocorra em um determinado sentido até que este encontre a segunda superfície e a toque em um certo ponto, o plano se tornará tangente, ao mesmo tempo, às duas primeiras superfícies, mas sua posição ainda não estará fixada: ele poderá, ainda, girar em torno das duas superfícies sem deixar de tocá-las e à medida em que ele se move os respectivos pontos de contato se deslocam de maneira que, se considerarmos a reta conduzida por esses dois pontos, o movimento de cada um deles será: (a) no mesmo sentido (em relação à reta) quando o plano tocar as superfícies do mesmo lado; (b) em sentidos contrários quando o plano tocar as superfícies, cada uma, de um lado (Figura 2). (MONGE, 1989, p.40, tradução nossa)

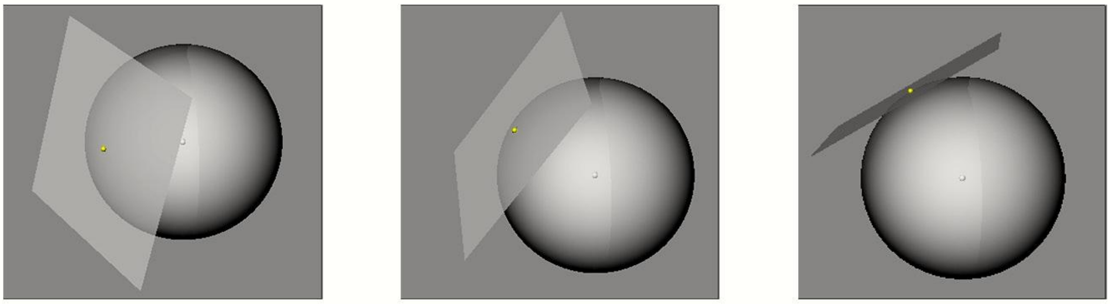

Figura 1 – Plano tangente a uma esfera

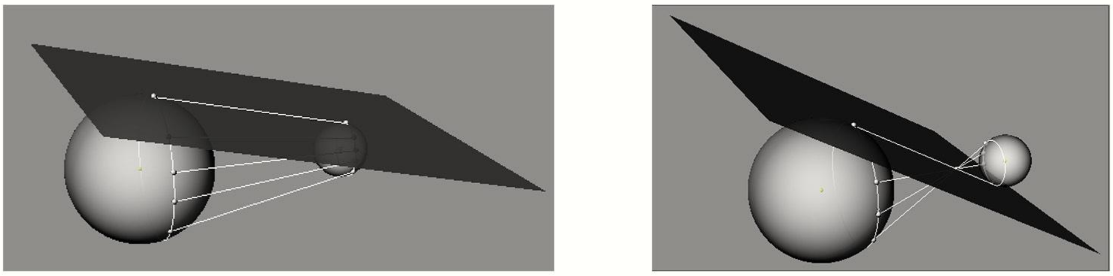

Figura 2 – Plano tangente a duas esferas

Se durante esse movimento o plano tangenciar a terceira curva então seu deslocamento ficará restringido, e não poderá mais se mexer, a menos que deixe de tangenciar uma das três curvas. Portanto, para determinar a posição de um plano que tangencie superfícies curvas dadas, em pontos de contato desconhecidos, são necessárias, em geral, três superfícies. (Ibid., p.40)

Desta forma, a proposição de conduzir um plano tangente a uma superfície curva dada equivale a uma das condições necessárias e pode-se, então, eleger outras duas à vontade. Por exemplo, fazer o plano passar por dois pontos dados o que equivale a passá-lo por uma reta de posição conhecida. Se a situação inicial for um plano tangente, ao mesmo tempo, a duas superfícies curvas dadas, serão duas condições impostas e restará apenas uma disponível, que poderá ser a de passá-lo por um ponto de posição conhecida. Em fim, se o plano tiver que tocar, simultaneamente, três superfícies dadas não haverá nenhuma condição disponível e sua posição estará determinada. (Ibid., p. 41)

Neste último parágrafo destacamos a decomposição e recombinação dos elementos de um problema, que fazem parte das operações mentais pontuadas por Pólya.

2.2 2ª Fase: Estabelecimento do plano

O plano instituído por Monge, portanto, consiste na redução do problema em indagações mais simples e correlatas cujas soluções serão empregadas no resultado final:

> 1º Problema: Conduzir o plano tangente à superfície de uma esfera, por uma reta dada;
>
> 2º Problema: Conduzir o plano tangente, simultaneamente, às superfícies de duas esferas, por um ponto dado.

Ao resolver o primeiro problema, Monge apresenta duas soluções diferentes. A primeira é particular e serve, em geral, à superfície específica da esfera. A segunda abrange todas as superfícies do segundo grau. A partir desta solução generalizada, o professor deduz corolários de geometria plana e espacial e reformula o problema por reciprocidade. Coroando a sequência de exposições, enuncia uma proposição geral que compreende tudo aquilo que foi desenvolvido passo a passo.

Na determinação do plano tangente, simultaneamente, às superfícies de duas esferas, por um ponto dado, Monge faz uso da proposição geral procedente do primeiro problema para determinar o segundo ponto do plano tangente. Este e o ponto dado definem uma reta do plano procurado, levando a questão a recair no problema anterior de conduzir um plano tangente à superfície de uma esfera por uma reta dada.

Finalmente, a solução para encontrar o plano tangente às superfícies de três esferas é apresentada por intermédio de uma regressão às operações mentais aplicadas ao segundo problema e culmina com a reincidência na primeira questão.

2.3 3ª Fase: Execução do plano

O plano elaborado compreende as soluções dos três problemas correlatos. Na resolução de cada um deles identificamos, novamente, as fases preconizadas por Pólya.

1º Problema: Conduzir o plano tangente à superfície de uma esfera, por uma reta dada

Compreensão do problema

Nesta primeira fase o professor identifica os "pontos-chave" do problema, ou sejam, os dois pontos de tangência.

> [...] é evidente que pela reta dada, podemos passar dois planos tangentes à esfera tais que o primeiro a tocará de um lado, o segundo do outro e entre os quais ela estará situada; isto determinará dois pontos de contato diferentes cujas projeções precisamos construir. (MONGE, 1989, p. 44, tradução nossa)

Estabelecimento do plano

No intuito de localizar esses pontos, investiga suas relações com os dados do problema por intermédio da introdução de outros elementos geométricos (Figura 3).

> Para tal, se concebermos uma perpendicular do centro da esfera baixada sobre cada um dos dois planos tangentes, cada uma delas conduzirá ao ponto de contato da superfície da esfera com o plano correspondente; e todas as duas estarão no plano perpendicular à reta dada: portanto, os dois pontos de contato estarão na seção da esfera pelo plano perpendicular; seção esta que será a circunferência de um dos grandes círculos da esfera e à qual serão tangentes as duas seções feitas nos dois planos tangentes, pelo mesmo plano (Ibid., p.44)

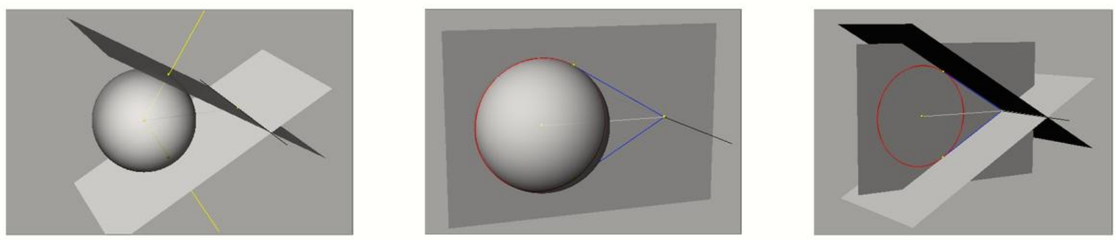

Figura 3 – Planos tangentes à esfera por uma reta dada – 1ª solução

Execução do plano

Monge descreve, meticulosamente, a maneira de encontrar, em épura, os dois pontos de contato da esfera com os respectivos planos tangentes, por intermédio das projeções ortogonais dos elementos estabelecidos no plano de ação. Neste momento distinguimos os procedimentos adotados na dupla projeção em uma folha de papel com o uso dos instrumentos tradicionais de desenho daqueles utilizados para modelagem em um programa gráfico tridimensional, valendo-se das respectivas ferramentas disponíveis. Queremos ressaltar, com isso, que a execução do plano depende do suporte em que o problema está sendo representado e do conjunto de instrumentos empregados. Portanto, não iremos reproduzir os passos que foram seguidos nesta etapa.

Retrospecto

Os itens que sucedem a resolução deste primeiro problema e antecedem a solução do segundo podem ser inseridos na fase do retrospecto, visto que servem à consolidação do conhecimento e sua aplicação a diversas situações. São eles:

1. Segunda solução para o problema:

O professor apresenta um procedimento diferente para construir o plano tangente a uma esfera por uma reta dada. Considera um plano qualquer passando pelo centro da esfera e determina o traço da reta no plano. Tomando esse ponto como vértice, concebe uma superfície cônica envelope da esfera. Infere que a superfície cônica tocará a da esfera em uma circunferência de círculo cujo plano será perpendicular ao eixo do cone. Pela reta dada, concebe dois planos tangentes à superfície cônica que a tocarão, cada um dos planos, segundo uma de suas geratrizes. Logo, esta estará contida na superfície cônica e também no plano. Uma vez que essa reta geratriz também toca a superfície da esfera em um de seus pontos, tal ponto pertencerá, ao mesmo tempo, à superfície cônica, ao plano que a tangencia, à superfície esférica e à circunferência de círculo, sendo portanto o ponto de contato comum a todos esses objetos. Enuncia, então, as seguintes proposições:

a. os dois planos tangentes à superfície cônica são, também, tangentes à da esfera e consistem nos planos que se pretende determinar;
b. os pontos de contato com a esfera pertencem à circunferência de círculo comum às superfícies do cone e da esfera;
c. a reta que passa pelos dois pontos de contato se encontra no mesmo plano do círculo comum (Figura 4). (Ibid., p.47)

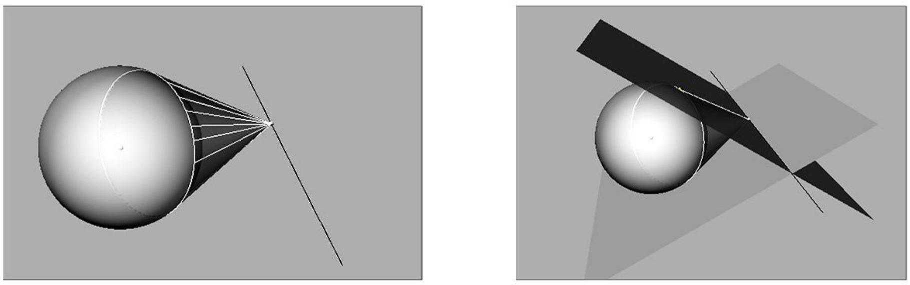

Figura 4 – Planos tangentes à esfera por uma reta dada – 2ª solução

Procedendo da mesma maneira com outro plano, obtém uma nova superfície cônica envelope da esfera e um novo círculo comum o qual, no entanto, passará pelos mesmos pontos de contato. Desta forma, cada uma das duas superfícies cônicas circunscritas à esfera a tangenciará por intermédio de uma circunferência de círculo e ambas as curvas obtidas passam pelos dois pontos de contato da esfera com os planos tangentes (Figura 5).

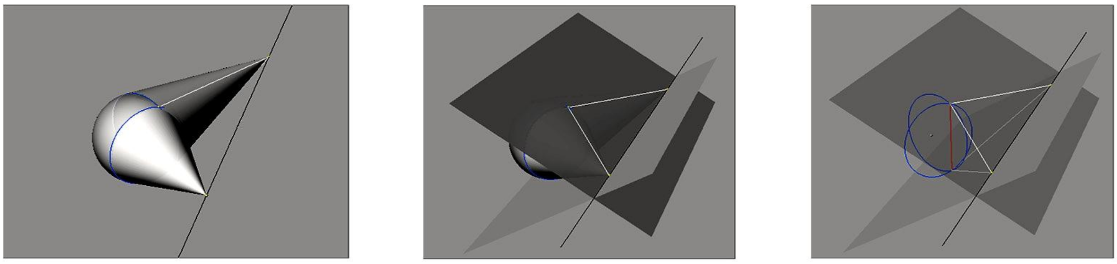

Figura 5 – Planos tangentes a uma esfera por uma reta dada – 2ª solução

2. Propriedades notáveis do círculo, da esfera, das seções cônicas e das superfícies curvas do segundo grau:

Monge considera que a superfície cônica circunscrita à esfera, cujo vértice se encontra na reta dada, se mova de maneira que seu vértice percorra a reta sem que o cone deixe de ser tangente à esfera. Mentalizando esse movimento, estabelece as seguintes asserções:

a. em cada posição, a superfície cônica tocará a esfera em uma circunferência de círculo;
b. todas essas circunferências passarão por dois mesmos pontos que serão os pontos de contato da esfera com os dois planos tangentes;
c. os planos dos círculos se cortarão segundo uma mesma linha reta, aquela à qual pertencem os dois pontos de contato;
d. o plano definido pela reta dada e o centro da esfera passará pelos eixos de todas as superfícies cônicas, será perpendicular aos planos de todos os círculos de contato e, consequentemente, à reta comum de interseção destes círculos; e cortará todos esses planos em linhas retas que passarão por um mesmo ponto (Figura 6).

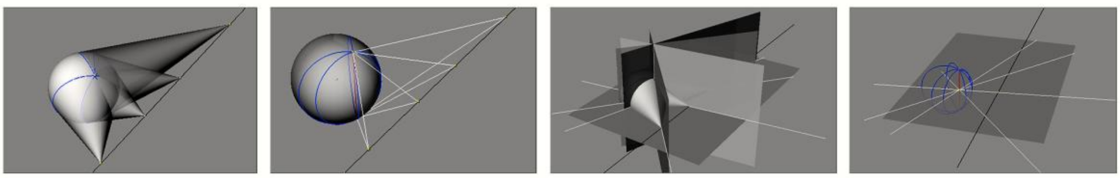

Figura 6 – Propriedades notáveis

3. Corolários de geometria plana decorrentes das proposições anteriores:

O professor transfere para a geometria plana as propriedades descobertas para os entes da geometria espacial. Para tal, observa o plano definido pela reta e o centro da esfera e leva em consideração o círculo de interseção entre este plano e a esfera. Concebendo as tangentes ao círculo por um ponto qualquer da reta e o segmento que une os pontos de tangência, impõe ao primeiro ponto um movimento por toda a extensão da reta levando com ele as tangentes. Conclui que os dois pontos de contato, assim como o segmento que os une, mudarão de posição ao longo do percurso, mas esse segmento passará sempre por um mesmo ponto que se encontra na perpendicular à reta pelo centro do círculo. Reciprocamente, se por um ponto tomado no plano do círculo forem traçadas retas que cortem a circunferência do círculo em dois pontos cada uma e se por esses dois pontos se conduzirem as tangentes ao círculo, cada par de tangentes concorrerá em um ponto e o conjunto de todos esses pontos definirão uma reta perpendicular à reta que une o centro do círculo e o ponto que determinou as retas secantes (Figura 7).

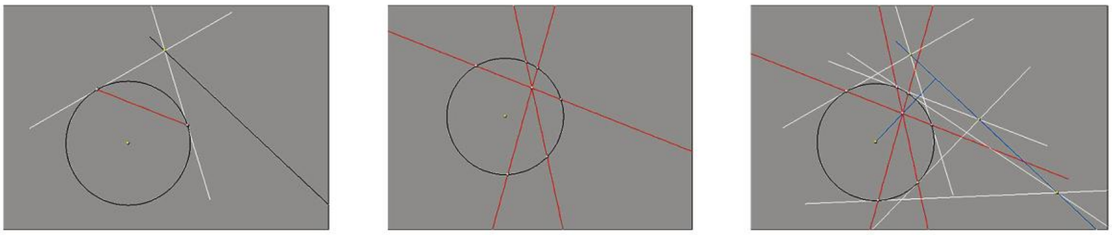

Figura 7 – Corolários da geometria plana

Isso posto, Monge intui que o círculo goza da propriedade enunciada por ser uma curva do segundo grau. Sendo assim, todas as seções cônicas se encontram no mesmo caso. Apresenta este fato substituindo a esfera por uma superfície gerada pela rotação de uma cônica qualquer, em torno de um de seus eixos, e em seguida transfere as conclusões para a geometria plana (Figura 8).

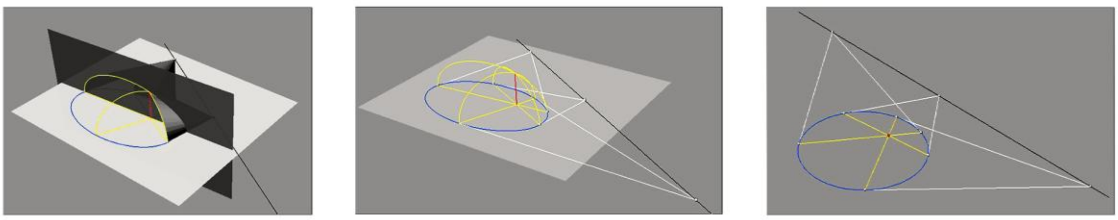

Figura 8 – generalização para as curvas do segundo grau

4. Proposição geral para o espaço tridimensional: Completando o processo de generalização, enuncia uma proposição geral para as superfícies do segundo grau:

> Sendo dadas no espaço uma superfície curva qualquer do segundo grau e uma superfície cônica circunscrita que a tangencie, e cujo vértice seja um ponto qualquer, se a superfície cônica se move, sem deixar de ser circunscrita à primeira superfície de maneira que seu vértice percorra uma reta qualquer, o plano da curva de contato das duas superfícies passará, sempre, por uma mesma linha reta (que será determinada pelos pontos de contato da superfície do segundo grau com os dois planos tangentes que passam pela reta dos vértices). Se a superfície cônica se mover de maneira que seu vértice permaneça em um mesmo plano, o plano da curva de contato passará, sempre, por um mesmo ponto. (Ibid., p. 52)

2º Problema: Plano tangente, simultaneamente, às superfícies de duas esferas, por um ponto dado

<u>Compreensão do problema</u>

Monge se vale da segunda solução enunciada no problema anterior e considera uma superfície cônica circunscrita, ao mesmo tempo, às duas esferas. Observa que esta superfície terá seu vértice na reta que passa pelos dois centros das esferas, respectivamente.

<u>Estabelecimento do plano</u>

A fim de encontrar o vértice da superfície cônica circunscrita devem ser conduzidas as retas tangentes às duas circunferências de dois grandes círculos, um de cada esfera, situados em um mesmo plano. O ponto de interseção das tangentes será o vértice do cone procurado. Pela reta traçada por esse vértice e o ponto dado serão descritos os dois planos tangentes à superfície cônica. Cada um destes planos tocará a superfície cônica em uma das suas retas geratrizes e, consequentemente, ambos serão tangentes às duas superfícies esféricas, simultaneamente. Portanto, a questão se reduz em traçar pela reta que passa pelo vértice do cone e pelo ponto dado, dois planos tangentes à superfície de uma das esferas. Isto será feito como na questão anterior e os dois planos serão tangentes, ao mesmo tempo, às duas esferas (Figura 9) (Ibid.,p. 52- 53).

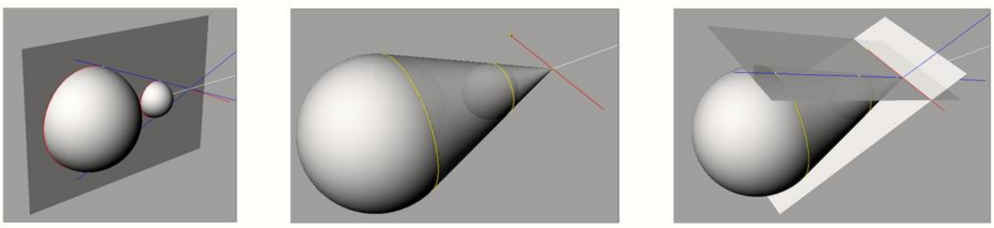

Figura 9 – Planos tangentes à duas esferas

3º Problema: Plano tangente, simultaneamente, às superfícies de três esferas dadas

Compreensão do problema

Ao conceber um plano tangente, ao mesmo tempo, a três esferas, Monge imagina uma superfície cônica circunscrita às duas primeiras esferas. Deduz que o plano tangente tocará a superfície cônica ao longo de uma de suas geratrizes e passará pelo vértice do cone. Imaginando uma segunda superfície cônica circunscrita à primeira e terceira esferas, o mesmo plano tangente a tocará ao longo de uma de sua retas geratrizes e passará pelo seu vértice. O mesmo ocorrerá para uma terceira superfície cônica que tangencie a segunda e a terceira esferas. Portanto, os vértices das três superfícies cônicas pertencerão ao plano tangente. Eles estarão contidos, também, no plano que passa pelos centros das esferas e que contém os três eixos. Sendo assim, os três vértices pertencerão a dois planos diferentes e, consequentemente, estarão em linha reta.

Estabelecimento do plano

Após identificar a colinearidade dos vértices das três superfícies cônicas circunscritas às esferas, duas a duas, o professor orienta quanto à determinação desses pontos, que deverá ser executada como no problema anterior. Encontrados dois desses vértices fica determinada a reta de interseção entre o plano tangente e aquele que contém os centros das esferas. Uma vez que a reta encontrada pertence ao plano tangente, a questão recai no primeiro problema, o de conduzir um plano tangente a uma esfera, por uma reta dada.

2.4 4ª Fase: Retrospecto

Procedendo à análise do problema formulado, Monge observa que é possível conceber duas superfícies cônicas que circunscrevam duas esferas. Na primeira delas, o vértice do cone se encontra além do centro de uma das esferas em relação à outra e, na segunda, o vértice se localiza entre os dois centros, um de cada esfera. Portanto, a questão anterior compreende seis superfícies cônicas das quais três serão circunscritas exteriormente às três esferas, tomadas duas a duas, enquanto as outras três superfícies cônicas serão circunscritas internamente. Os vértices dos seis cones estarão, três a três, sobre quatro retas e tomando-se cada uma delas como base podem ser conduzidos dois planos tangentes às três esferas. Desta forma, oito planos diferentes poderão satisfazer à questão proposta sendo que dois deles tocarão as três esferas de um mesmo lado e os seis demais tangenciarão duas esferas de um lado e a terceira esfera, do outro (Figura 10).

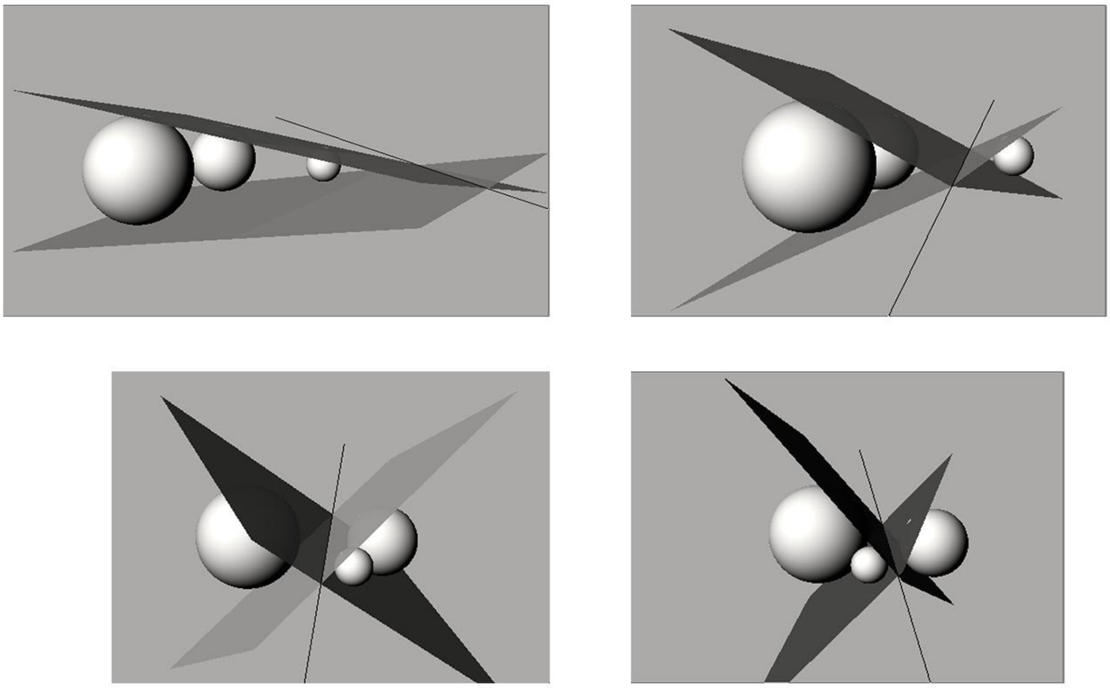

Figura 10 – Oito planos tangentes

3 Conclusão

A geometria descritiva de Monge não se resume a uma técnica de representação da solução de um problema de geometria espacial em uma superfície plana. Ela abrange a compreensão da situação tridimensional, a elaboração de um plano de ação, a execução deste plano considerando o suporte de representação e o retrospecto daquilo que foi feito consolidando, assim, o conhecimento adquirido. Em outras palavras, compreende um método de resolução de problemas e de descobertas em geometria plana e espacial que pode ser aplicado nas diversas técnicas de representação. Diante disso, sustentamos a crença de que as lições mongeanas devem ser revistas e adaptadas aos meios digitais de representação gráfica.

Referências

MONGE, Gaspard. **Géométrie descriptive:** leçons données aux écoles normales, l’an 3 de la république. Paris, França: Jacques Gabay, 1989.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 1995.